⑤ $f(x) = \log(1+x)$ $x>-1$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Γενικά, μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή, ότι η k-τάξης παράγωγος της f στο σημείο x είναι:

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad \forall x>-1, \ \forall k=1,2,3,\dots$$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$

$f(0)=0$

$f'(0)=1$

$f''(0)=-1$

$f'''(0)=2$

$f^{(4)}(0)=-6$

$\vdots$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \ \forall k=1,2,3,\dots$$

$$T_{n,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

$$\left(=x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^n}{n}\right)$$

Έστω $x>-1$.

Από την ολοκληρωτική μορφή Taylor

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{1}{\cancel{n!}}\int_0^x \frac{(-1)^n \cancel{n!}}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^n\,dt =$$
$$=(-1)^n\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n\cdot\frac{1}{1+t}\,dt$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής: $y = \frac{x-t}{1+t}$

$t=0 \rightsquigarrow y=x$

$t=x \rightsquigarrow y=0$

$$y = \frac{x-t}{1+t} \Rightarrow y+yt = x-t \Rightarrow t+yt = x-y \Rightarrow t = \frac{x-y}{1+y}$$

Οπότε, $dt = \frac{(-1)(1+y)-(x-y)}{(1+y)^2}dy \Rightarrow dt = \frac{-1-x}{(1+y)^2}dy$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+\frac{x-y}{1+y}} = \frac{1+y}{1+x}$$

Έτσι, $R_{n,f,0}(x) = (-1)^n \int_x^0 y^n \cdot \frac{1+y}{1+x} \cdot \frac{-(1+x)}{(1+y)^2}\, dy =$

$$= (-1)^n \int_0^x \frac{y^n}{1+y}\, dy$$

- Αν $-1<x<0$.

$$|R_{n,f,0}(x)| \le \int_x^0 \frac{|y|^n}{1+y}\, dy \le \frac{1}{1+x}\int_x^0 (-y)^n\, dy = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$x \le y \le 0$

$1+x \le 1+y \le 1$

$1 \le \frac{1}{1+y} \le \frac{1}{1+x}$

- Αν $0<x\le 1$.

$$|R_{n,f,0}(x)| = \int_0^x \frac{y^n}{1+y}\, dy \le \int_0^x y^n\, dy = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$0 \le y \le x$

$1 \le 1+y \le 1+x$

$\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+y} \le 1$

Και στις δύο περιπτώσεις:

$R_{n,f,0}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα, $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ για $-1<x\le 1$

Η σειρά αποκλίνει για $x>1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για $x=1$ προκύπτει:

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

ε) $f(x) = \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

$$\left[1+y+\dots+y^n = \frac{1-y^{n+1}}{1-y} \;\middle|\; \frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\dots+y^n + \frac{y^{n+1}}{1-y} \quad \forall n=1,2,\dots \right]$$

Έτσι, για $y=-t^2$ έχουμε:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4-t^6+t^8+\dots+(-1)^n t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή από 0 έως x

$$\underbrace{\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt}_{=\arctan x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Θέτουμε $P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \le \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

▷ Για $|x| \le 1$:

$$\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \longrightarrow 0$$

Άρα, $\lim_n P_n(x) = f(x)$

Έτσι, για $|x| \le 1$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

▷ Για $|x|>1$, η σειρά αποκλίνει.

Από τον Απειροστικό Λογισμό Ι γνωρίζουμε ότι:

Αν $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και x_0 εσωτερικό σημείο του I

και $f'(x_0)=0$

→ Αν $f''(x_0)>0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

→ Αν $f''(x_0)<0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ και x_0 εσωτερικό σημείο του I.
$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ και $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ με την f n-φορές παραγωγίσιμη.

α) Αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0$, τότε η f παρουσιάζει (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο στο x_0.

β) Αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0)<0$, τότε η f παρουσιάζει (γνήσιο) τοπικό μέγιστο στο x_0.

γ) Αν n περιττός, η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

<u>Απόδειξη:</u>

Με δεδομένο πως ούτε η υπόθεση, ούτε το συμπέρασμα του θεωρήματος επηρεάζονται αν αντικαταστήσουμε την f με την $f-f(x_0)$, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, πως $f(x_0)=0$.

$$T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Από Θεώρημα που έχουμε δείξει:

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}$$

Και εφόσον $T_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right]=0.$$ Άρα, $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Άρα, $\exists\delta>0$ ώστε $\forall x$ με $0<|x-x_0|<\delta$, τα $\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}$ και $f^{(n)}(x_0)$ είναι ομόσημα.

α) Αν n άρτιος, τότε $(x-x_0)^n$ είναι θετικό για $x\neq x_0$.

Άρα, το $f(x)$ είναι ομόσημο με το $f^{(n)}(x_0)$

- Αν $f^{(n)}(x_0)>0$ τότε $f(x)>0=f(x_0)$ για $0<|x-x_0|<\delta$
  άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0
- Αν $f^{(n)}(x_0)<0$ τότε $f(x)<0=f(x_0)$ για $0<|x-x_0|<\delta$
  άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0

β) Αν n περιττός δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

Αν n περιττός, τότε $(x-x_0)^n>0$ για $x>x_0$ και $(x-x_0)^n<0$ για $x<x_0$.

Άρα, $f(x)$ ομόσημο του $f^{(n)}(x_0)$ για $x\in(x_0, x_0+\delta)$ και $f(x)$ ετερόσημο του $f^{(n)}(x_0)$ για $x\in(x_0-\delta, x_0)$.

Επομένως, η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

Άσκηση: (Θα την λύσετε στο επόμενο μάθημα)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

α) Ν.δ.ο. $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0$

για κάποιο πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού $2n-2$

$P_{n+1}(x)=x^3P_n'(x)+(2-3nx^2)P_n(x)$

β) $f^{(k)}(0)=0 \ \forall k\in\mathbb{N}$.